



### Abstract

De schoonheid van steen

pagina 69



### Alledaags

Eieren koken en koekjes dopen

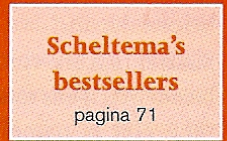
pagina 70



### Dinodieven

Fraude en diefstal beheersen fossielenhandel

pagina 71



# Wereldkaart in vier kleuren

Meer dan honderd jaar wiskundig denkwerk en 1200 uren computerrekening leverden in 1976 eindelijk de oplossing van een – voor zowel amateurs als professionals – zeer tot de verbeelding sprekend wiskunderaadsel: het vierkleurenprobleem.

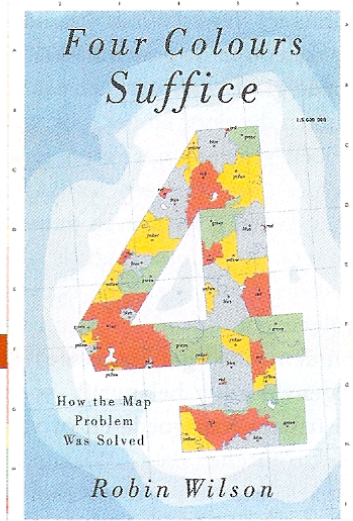
## Wiskunde

**H**et is nu ruim anderhalve eeuw geleden dat Francis Guthrie aan zijn wiskunde-professor de volgende vraag stelde: “Je ziet vaak landkaarten waarop ieder land een kleur heeft gekregen, en wel zo dat landen die een stuk grens gemeen hebben verschillend ge-

dat we nu precies weten welke dag het was: 23 oktober 1852.

Wiskundige Robin Wilson heeft de honderdvijftigste verjaardag van het probleem aangeprezen om een onderhoudend en instructief boek te schrijven – *Four colours suffice* – over de lotgevallen van dit probleem, nu be-

redenen voor. Om te beginnen is het eenvoudig de probleemstelling te begrijpen. Verder is het bekend dat je altijd met vijf kleuren toe kunt. Er hoeft dus maar één kleur af! Dat je soms echt vier kleuren nodig hebt zie je aan een kaart die Luxemburg en zijn burens bevat.



den op de kaart staan. Dan is het probleem dus niet meer interessant. We willen het moeilijk houden.

## Laat dit de lezer niet weerhouden om te proberen het vierkleurenprobleem zonder computer op te lossen

kleurd zijn. Dus zo, dat je aan de kleuring ziet waar de grenzen lopen. Nou is mijn bewering dat je nooit meer dan vier kleuren nodig hebt om dit voor elkaar te krijgen. Is dat bekend?”

Zijn leraar, Augustus De Morgan, wist het niet, en was er ook niet zo zeker van of zijn student wel gelijk had. Dezelfde dag nog noemde De Morgan het probleem in een brief aan Sir William Rowan Hamilton (ze schreven elkaar regelmatig) zo-

kend als het vierkleurenprobleem. Dit probleem heeft generaties van amateurs en wiskundigen gefascineerd, waaronder ondergetekende. Als student heb ik vele uren doorgebracht met pogingen om een sluitend argument te vinden. Mijn ouders zagen mijn gekleurde met verontusting aan. Ik heb er overigens geen spijt van. Je moet ook eens iets proberen wat te moeilijk is.

Wat maakt het probleem zo fascinerend? Daar is een aantal

Ik zal de probleemstelling een beetje preciseren. Zo had ik het over ‘een stuk grens’. Als twee landen slechts een punt gemeen hebben, dan tellen we dat niet. Dus de gebruikelijke manier om de velden van een schaakbord te kleuren is aanvaardbaar, en twee kleuren zijn voor een schaakbord al genoeg. Wat je ook af moet spreken is dat landen uit één stuk moeten bestaan. Als je die eis laat vallen kun je evenveel kleuren nodig hebben als er lan-

### Sluitend bewijs

Ook de geschiedenis van het probleem draagt bij aan de fascinatie. Zo verscheen er al gauw een ‘bewijs’ in een serieus wiskundetijdschrift, en de wiskundigen hebben ruim tien jaar geloofd dat dit bewijs (van de heer Kempe, spreek uit Kemp) sluitend was. En dat was niet omdat niemand het las. Zoals het boek van Wilson goed uit de doeken doet, was er wel degelijk belangstelling voor de oplossing. Wat me als wiskundige dan toch een beetje geruststelt, is dat uiteindelijk meerdere mensen ontdekten dat er iets mis was met de argumentatie.

Wilson toont gevoel voor humor in zijn boek. Hij legt het foute bewijs van Kempe heel goed uit, maar zegt niet wat er fout aan is. Hij zegt alleen dat hij



dat enkele hoofdstukken later zal uitleggen. Een goede uitdaging voor de lezer.

### Veelvlakken

Kaartenmakers vinden het probleem overigens totaal oninteressant. Het is namelijk echt een wiskunde probleem. En zoals je meestal ziet met wiskunde, zijn er onverwachte verbanden. Het vierkleurenprobleem is een grote stimulans geweest voor het ontwikkelen van de grafentheorie.

Een graaf bestaat uit een aantal punten die door lijntjes, ook wel ribben geheten, zijn verbonden. In het geval van een landkaart krijg je een graaf met als punten de meerlandenpunten en als ribben de stukjes grens die opeenvolgende meerlandenpunten verbinden. De grafentheorie is tegenwoordig belangrijk voor distributie van goederen of van elektronische data. Wiskunde blijkt steeds weer over te stromen naar andere vakgebieden.

Het boek van Wilson geeft nog een verband tussen het vierkleurenprobleem en een onderwerp

dat er op het eerste gezicht niets mee te maken heeft, namelijk een formule van Euler. Deze formule was nodig in het foute bewijs van Kempe, en ook in de uiteindelijke oplossing.

Ja, 'helaas', het probleem werd in 1976 door Appel en Haken opgelost. Maar niet getreurd, die oplossing laat nog veel te wensen over: het vergde honderden pagina's berekeningen met de hand, gecombineerd met meer dan duizend uur rekenen op een mainframe. Het bewijs is inmiddels door anderen wat minder gruwelijk gemaakt (zie ook de website [www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html](http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html)). Maar laat dit de lezer niet weerhouden om te proberen het zonder computer te doen. Zoals gezegd, het is te moeilijk, maar het is leerzaam dat zelf te ontdekken.

Euler keek in november 1750 naar veelvlakken. Een kubus bijvoorbeeld. We gaan tellen. Er zijn zes zijvlakken, acht hoekpunten en twaalf ribben. Nu merkte Euler op dat zes plus acht min

twaalf uitkomt op twee. We doen het nog eens, nu met een afgeknotte icosaeëder, die sprekend op een voetbal lijkt. Alleen is een voetbal rond, terwijl bij de afgeknotte icosaeëder iedere vijfhoek en iedere zeshoek een plat zijvlak begrenst.

Euler kende de voetbal niet, maar voor het tellen maakt dat weinig uit. Tellen we de zwarte vijfhoeken op een voetbal, dan vinden we er twaalf. En er zijn twintig witte zeshoeken. Dus samen 32 zijvlakken voor de afgeknotte icosaeëder. En dan heeft de voetbal negentig naden, die in zestig 'drielandenpunten' bij elkaar komen. Dus voor de afgeknotte icosaeëder krijgen we 32 plus 60 min 90, dus weer twee. De ontdekking van Euler is dat er altijd twee uit komt.

Wilson legt in het boek goed uit hoe men deze formule van Euler kan afleiden, en wat dit voor kaarten betekent. Dat zeg ik nou wel, maar legt hij het echt goed uit? Het hangt ervan af wat je wilt. Het argument dat Wilson geeft is niet sluitend. Het houdt

er geen rekening mee dat de grens tussen twee buurlanden uit meer dan een stuk zou kunnen bestaan. De lezer die het probleem ziet, heeft vast weinig moeite om het argument van Wilson aan te passen voor zo'n uitzondering.

Dat is typerend voor het boek. Je leert de kern van de zaak, en voor voetangels en klemmen moet je maar een (slechter leesbaar) leerboek raadplegen. Wilson schrijft bovenal een schitterend verhaal waarvan je kunt leren hoe wiskunde een levend onderwerp is, waarin steeds veel nieuws te doen blijft.

Dr Wilberd van der Kallen,  
Mathematisch Instituut,  
Universiteit Utrecht

Robin Wilson  
Four colours suffice – How the  
map problem was solved

Londen: Penguin/Allen Lane,  
2002, £12,99,  
ISBN 0713996706